Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2015-2016***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (14/1/2016)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0001-0014-0001-2016-314116-0001 **(Nộp lại đề này)**

# PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

***Câu 1*** Khẳng định nào sau đây **sai**?

A) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$, $\forall n\in Z$.

B) Phương trình $e^Z = 2016.e^{-3\pi i}$ vô nghiệm.

C) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \pm 2k\pi \end{cases}$

D) $[r(\cos\varphi \mp i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi \mp i\sin n\varphi)$, $\forall n\in Z$.

**Câu 2** Phần thực và phần ảo của hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \dfrac{1+3i}{1-2i} - i^5 + e^{3z}$ là:

A) $u(x,y) = -1 + e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$

B) $u(x,y) = 1 + e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$

C) $u(x,y) = e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$

D) $u(x,y) = -1 + e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = -e^{3x}\sin 3y$

**Câu 3** Khẳng định nào sau đây **sai?**

**A)** Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Riemann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.
**B)** Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.
**C)** Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không khả vi trên miền D.
**D)** Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm $z = x_o+iy_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Riemann tại $(x_o,y_o)$.

**Câu 4** Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 - 9y + 5$, $v = 6xy + 9x + 5$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v là các hàm điều hòa liên hợp

B) u điều hòa, v không điều hòa.

C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.

D) v điều hòa, u không điều hòa

***Câu 5*** Khẳng định nào sao đây sai?

A) Hàm f(z) có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức khi và chỉ khi f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức.

B) Hàm f(z) = $8z + e^{5z}$ có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên giải tích trên toàn mặt phẳng phức.

C) $\displaystyle\oint_{|z+6i|=2} \frac{8z+e^{5z}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i(8+5e^5)$

D) $\displaystyle\oint_{|z-2i|=6} \frac{8z+e^{5z}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i(8+5e^5)$

**Câu 6** Ảnh của đường thẳng y = -x qua phép biến hình $w = \dfrac{1}{3z}$ = u +iv là

A) đường thẳng u = v.

B) nửa đường thẳng u = v, với v > 0.

C) đường thẳng u = -v.

D) nửa đường thẳng u = -v, với v < 0.

***Câu 7*** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu khai triểm Laurent hàm f(z) quanh điểm bất thường cô lập a có dạng

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{thì } \operatorname{Res}[f(z),a] = a_{-1}$$

B) $f(z) = z^3 e^{\frac{2}{z}} = z^3 + 2z^2 + 2z + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{z\ .4!} + \ldots$ và z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

C) $\oint\limits_{|z-2i|=5} z^3 e^{\frac{2}{z}} dz = = 2\pi i \operatorname{Res}\left[z^3 e^{\frac{2}{z}}, 0\right] = \frac{4\pi}{3}$

D) Hàm f(z)=(z+i) $\cos\frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{(z+i)^{2n-1}}$ nên thặng dư $\operatorname{Res}\left[(z+i)\cos\frac{1}{z+i}, -i\right] = -\frac{1}{2}$.

***Câu 8*** Cho phương trình vi phân: $y' + 6y = u(t-5)e^{2(t-5)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 14.

Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1 ) ta được: $pY + 6Y = \frac{e^{-5p}}{p-2} + 14$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : $Y = \frac{e^{-5p}}{(p-2)(p+6)} + \frac{14}{p+6}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: $Y = \frac{1}{8} e^{-5p}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+6}\right) + \frac{14}{p+6}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: $y = \frac{1}{8}\left(e^{2(t-5)} - e^{-6(t-5}\right)u(t-5) + 14e^{-6t}$

**A)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**B)** Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

**Câu 9** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u} ch6u du\right] = \frac{p-5}{p\left((p-5)^2 - 36\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-Tp}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D) Nếu $f(t) = \begin{cases} 0 & khi \quad 0 < t < \pi \\ \sin 9t & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-\pi p}} \int_\pi^{2\pi} e^{-pt} \sin 9t dt$

***Câu 10*** Để giải phương trình tích phân: $y(t) = 2e^{-7t} + 10\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: $y(t) = 2e^{-7t} + 10y(t)*\cos 3t$
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được
  $$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[2e^{-7t}] + 10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$
- Áp dụng công thức Borel ta được
  $$Y = \frac{2}{p+7} + 10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y = \frac{2}{p+7} + 10Y\frac{p}{p^2+9}$$
- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: $Y = \frac{2(p^2+9)}{(p-1)(p-9)(p+7)}$

- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-9}+\frac{C}{p+7}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{t}+Be^{9t}+Ce^{-7t}$

| | |
|---|---|
| **A)** Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai. | **C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai. |
| **B)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng. | **D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai. |

## PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** (1,5 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z)=(z-i)^2\sin\frac{1}{z-i}$ quanh điểm bất thường cô lập $z=i$. Tính tích phân $I=\oint\limits_{|z-3i|=6}\left((z+i)^2\sin\frac{1}{z-i}+e^{5z}\right)dz$.

***Câu 12*** (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

y'' + 6y' +20 y = 50 + $e^{-6t}$ với điều kiện y(0) = 0 và y'(0) = 0

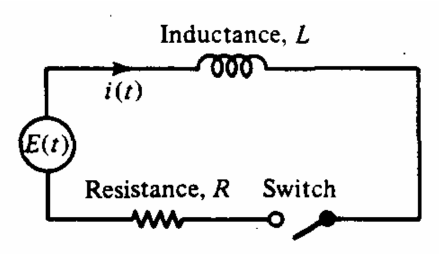
Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

***Câu 13*** (1,5 *điểm*)

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$$L\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t)=E_o\ ,\ i(0)=0$$

với $E_o,R,L$ là các hằng số dương.




Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}i(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $i(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

---

*** Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| **Nội dung kiểm tra** | **Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)** |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân.<br>Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống. | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |

Ngày 13 tháng 1 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2015-2016<br>MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE<br>Mã đề: 0001-0014-0001-2016-314116-0001</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: .....................................<br>Mã số sinh viên:................................<br>Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ...........<br>Thời gian : 90 phút (14/1/2016)<br>Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2015-2016***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (14/1/2016)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0010-0014-0001-2016-314116-0010 **(Nộp lại đề này)**

## PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

***<u>Câu 1</u>*** Cho phương trình vi phân: y'+6y = u(t-5)$e^{2(t-5)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 14.

Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- ♦ Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1 ) ta được: $pY+6Y = \dfrac{e^{-5p}}{p-2} + 14$ (2)
- ♦ Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : $Y = \dfrac{e^{-5p}}{(p-2)(p+6)} + \dfrac{14}{p+6}$ (3)
- ♦ Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: $Y = \dfrac{1}{8}e^{-5p}\left(\dfrac{1}{p-2} - \dfrac{1}{p+6}\right) + \dfrac{14}{p+6}$
- ♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: $y = \dfrac{1}{8}\left(e^{2(t-5)} - e^{-6(t-5)}\right)u(t-5) + 14e^{-6t}$

**A)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**B)** Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

**<u>Câu 2</u>** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u} ch6u du\right] = \dfrac{p-5}{p\left((p-5)^2-36\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D) Nếu $f(t) = \begin{cases} 0 & khi \quad 0<t<\pi \\ \sin 9t & khi \quad \pi<t<2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_\pi^{2\pi} e^{-pt}\sin 9t dt$

***<u>Câu 3</u>*** Khẳng định nào sau đây **sai**?

A) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i \sin n\varphi$, $\forall n\in Z$.

B) Phương trình $e^z = 2016.e^{-3\pi i}$ vô nghiệm.

C) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \pm 2k\pi \end{cases}$

D) $[r(\cos\varphi \mp i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi \mp i \sin n\varphi)$, $\forall n\in Z$.

**<u>Câu 4</u>** Phần thực và phần ảo của hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \dfrac{1+3i}{1-2i} - i^5 + e^{3z}$ là:

A) $u(x,y) = -1 + e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$
B) $u(x,y) = 1 + e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$
C) $u(x,y) = e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$
D) $u(x,y) = -1 + e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = -e^{3x}\sin 3y$

**<u>Câu 5</u>** Khẳng định nào sau đây **sai?**

**A)** Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Riemann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.

**B)** Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.
**C)** Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không khả vi trên miền D.
**D)** Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm z = $x_o$+i$y_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Riemann tại ($x_o$,$y_o$).

**<u>Câu 6</u>** Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 - 9y + 5$, $v = 6xy + 9x + 5$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

| | |
|---|---|
| A) u, v là các hàm điều hòa liên hợp | C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp. |
| B) u điều hòa, v không điều hòa. | D) v điều hòa, u không điều hòa |

***<u>Câu 7</u>*** Khẳng định nào sao đây sai?

A) Hàm f(z) có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức khi và chỉ khi f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức.

B) Hàm f(z) = $8z + e^{5z}$ có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên giải tích trên toàn mặt phẳng phức.

C) $\oint\limits_{|z+6i|=2} \frac{8z + e^{5z}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i(8 + 5e^5)$  D) $\oint\limits_{|z-2i|=6} \frac{8z + e^{5z}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i(8 + 5e^5)$

**<u>Câu 8</u>** Ảnh của đường thẳng y = -x qua phép biến hình $w = \frac{1}{3z}$ = u +iv là

A) đường thẳng u = v.  B) nửa đường thẳng u = v, với v > 0.
C) đường thẳng u = -v.  D) nửa đường thẳng u = -v, với v < 0.

***<u>Câu 9</u>*** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu khai triểm Laurent hàm f(z) quanh điểm bất thường cô lập a có dạng

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \text{ thì } \operatorname{Res}[f(z), a] = a_{-1}$$

B) f(z) = $z^3 e^{\frac{2}{z}} = z^3 + 2z^2 + 2z + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{z\ .4!} + \ldots$ và z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

C) $\oint\limits_{|z-2i|=5} z^3 e^{\frac{2}{z}} dz = = 2\pi i \operatorname{Res}\left[z^3 e^{\frac{2}{z}}, 0\right] = \frac{4\pi}{3}$

D) Hàm f(z)=(z+i) $\cos\frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{(z+i)^{2n-1}}$ nên thặng dư $\operatorname{Res}\left[(z+i)\cos\frac{1}{z+i}, -i\right] = -\frac{1}{2}$.

***<u>Câu 10</u>*** Để giải phương trình tích phân: y(t)= $2e^{-7t} + 10\int_0^t y(u)\cos 3(t-u) du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = $2e^{-7t}$+10y(t)*cos3t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[2e^{-7t}] + 10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$

- Áp dụng công thức Borel ta được

$$Y = \frac{2}{p+7} + 10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y = \frac{2}{p+7} + 10Y\frac{p}{p^2+9}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\frac{2(p^2+9)}{(p-1)(p-9)(p+7)}$

- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-9}+\frac{C}{p+7}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{t}+Be^{9t}+Ce^{-7t}$

| | |
|---|---|
| **A)** Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai. | **C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai. |
| **B)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng. | **D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai. |

## PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** (1,5 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z)=(z-i)^2\sin\frac{1}{z-i}$ quanh điểm bất thường cô lập $z=i$. Tính tích phân $I=\oint\limits_{|z-3i|=6}\left((z+i)^2\sin\frac{1}{z-i}+e^{5z}\right)dz$.

***Câu 12*** (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

y'' + 6y' +20 y = 50 + $e^{-6t}$ với điều kiện y(0) = 0 và y'(0) = 0

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

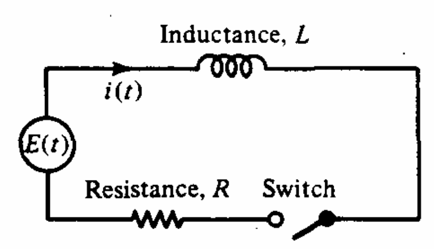
***Câu 13*** (1,5 *điểm*)

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$$L\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t)=E_o\ ,\ i(0)=0$$

với $E_o, R, L$ là các hằng số dương.

Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}i(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $i(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.




---

*** Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| **Nội dung kiểm tra** | **Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)** |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân.<br>Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống. | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |

Ngày 13 tháng 1 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2015-2016<br>MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE<br>Mã đề: 0010-0014-0001-2016-314116-0010</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: .....................................<br>Mã số sinh viên:................................<br>Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ...........<br>Thời gian : 90 phút (14/1/2016)<br>Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2015-2016***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (14/1/2016)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0011-0014-0001-2016-314116-0011 (**Nộp lại đề này**)

## PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

**Câu 1** Ảnh của đường thẳng y = -x qua phép biến hình $w = \frac{1}{3z}$ = u +iv là

A) đường thẳng u = v.
B) nửa đường thẳng u = v, với v > 0.
C) đường thẳng u = -v.
D) nửa đường thẳng u = -v, với v < 0.

***Câu 2*** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu khai triểm Laurent hàm f(z) quanh điểm bất thường cô lập a có dạng $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ thì $\operatorname{Res}[f(z), a] = a_{-1}$

B) f(z) = $z^3 e^{\frac{2}{z}} = z^3 + 2z^2 + 2z + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{z\ .4!} + \dots$ và z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

C) $\oint_{|z-2i|=5} z^3 e^{\frac{2}{z}} dz = = 2\pi i \operatorname{Res}\left[z^3 e^{\frac{2}{z}}, 0\right] = \frac{4\pi}{3}$

D) Hàm f(z)=(z+i) $\cos\frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{(z+i)^{2n-1}}$ nên thặng dư $\operatorname{Res}\left[(z+i)\cos\frac{1}{z+i}, -i\right] = -\frac{1}{2}$.

***Câu 3*** Cho phương trình vi phân: y'+6y = u(t-5) $e^{2(t-5)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 14.

Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1 ) ta được: $pY + 6Y = \frac{e^{-5p}}{p-2} + 14$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : $Y = \frac{e^{-5p}}{(p-2)(p+6)} + \frac{14}{p+6}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: $Y = \frac{1}{8} e^{-5p}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+6}\right) + \frac{14}{p+6}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: $y = \frac{1}{8}\left(e^{2(t-5)} - e^{-6(t-5)}\right)u(t-5) + 14e^{-6t}$

**A)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**B)** Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

**Câu 4** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u} ch6u du\right] = \frac{p-5}{p\left((p-5)^2 - 36\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-Tp}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D) Nếu $f(t)=\begin{cases}0 & khi \quad 0<t<\pi \\ \sin 9t\, khi & \pi<t<2\pi\end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-\pi p}}\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} e^{-pt}\sin 9t dt$

***Câu 5*** Khẳng định nào sau đây **sai**?

A) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$, $\forall n\in Z$.

B) Phương trình $e^Z = 2016.e^{-3\pi i}$ vô nghiệm.

C) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \pm 2k\pi\end{cases}$

D) $[r(\cos\varphi \mp i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi \mp i\sin n\varphi)$, $\forall n\in Z$.

**Câu 6** Phần thực và phần ảo của hàm phức $f(z)=u(x,y)+iv(x,y) = \dfrac{1+3i}{1-2i} - i^5 + e^{3z}$ là:

A) $u(x,y)=-1+e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y)=e^{3x}\sin 3y$

B) $u(x,y)=1+e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y)=e^{3x}\sin 3y$

C) $u(x,y)=e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y)=e^{3x}\sin 3y$

D) $u(x,y)=-1+e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y)=-e^{3x}\sin 3y$

**Câu 7** Khẳng định nào sau đây **sai?**

**A)** Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Riemann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.

**B)** Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

**C)** Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không khả vi trên miền D.

**D)** Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm $z = x_o+iy_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Riemann tại $(x_o,y_o)$.

**Câu 8** Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=3x^2-3y^2-9y+5$, $v=6xy+9x+5$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v là các hàm điều hòa liên hợp

B) u điều hòa, v không điều hòa.

C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.

D) v điều hòa, u không điều hòa

***Câu 9*** Khẳng định nào sao đây sai?

A) Hàm f(z) có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức khi và chỉ khi f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức.

B) Hàm f(z) = $8z+e^{5z}$ có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên giải tích trên toàn mặt phẳng phức.

C) $\displaystyle\oint_{|z+6i|=2} \frac{8z+e^{5z}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i(8+5e^5)$

D) $\displaystyle\oint_{|z-2i|=6} \frac{8z+e^{5z}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i(8+5e^5)$

***Câu 10*** Để giải phương trình tích phân: y(t)= $2e^{-7t} + 10\displaystyle\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = $2e^{-7t}$ +10y(t)*cos3t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[2e^{-7t}] + 10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$

- Áp dụng công thức Borel ta được

$$Y = \frac{2}{p+7} + 10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y = \frac{2}{p+7} + 10Y\frac{p}{p^2+9}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: $Y = \dfrac{2(p^2+9)}{(p-1)(p-9)(p+7)}$

- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-9}+\frac{C}{p+7}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{t}+Be^{9t}+Ce^{-7t}$

**A)** Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
**B)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

## PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** (1,5 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z)=(z-i)^2\sin\frac{1}{z-i}$ quanh điểm bất thường cô lập $z=i$. Tính tích phân $I=\oint\limits_{|z-3i|=6}\left((z+i)^2\sin\frac{1}{z-i}+e^{5z}\right)dz$.

***Câu 12*** (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

y'' + 6y' +20 y = 50 + $e^{-6t}$ với điều kiện y(0) = 0 và y'(0) = 0

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

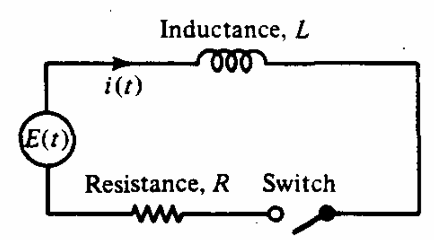
***Câu 13*** (1,5 *điểm*)

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$$L\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t)=E_o\ ,\ i(0)=0$$

với $E_o, R, L$ là các hằng số dương.

Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}i(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $i(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.




---

*** Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| Nội dung kiểm tra | Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức) |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân.<br>Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống. | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |

Ngày 13 tháng 1 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2015-2016<br>MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE<br>Mã đề: 0011-0014-0001-2016-314116-0011</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ......................................<br>Mã số sinh viên:................................<br>Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ...........<br>Thời gian : 90 phút (14/1/2016)<br>Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2015-2016***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (14/1/2016)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0100-0014-0001-2016-314116-0100 (**Nộp lại đề này**)

# PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

**Câu 1** Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=3x^2-3y^2-9y+5$, $v=6xy+9x+5$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v là các hàm điều hòa liên hợp
B) u điều hòa, v không điều hòa.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

***Câu 2*** Khẳng định nào sao đây sai?

A) Hàm f(z) có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức khi và chỉ khi f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức.

B) Hàm f(z) = $8z+e^{5z}$ có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên giải tích trên toàn mặt phẳng phức.

C) $\displaystyle\oint\limits_{|z+6i|=2}\frac{8z+e^{5z}}{(z-1)^2}dz=2\pi i(8+5e^5)$

D) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=6}\frac{8z+e^{5z}}{(z-1)^2}dz=2\pi i(8+5e^5)$

**Câu 3** Ảnh của đường thẳng y = -x qua phép biến hình $w=\dfrac{1}{3z}$ = u +iv là

A) đường thẳng u = v.
B) nửa đường thẳng u = v, với v > 0.
C) đường thẳng u = -v.
D) nửa đường thẳng u = -v, với v < 0.

***Câu 4*** Cho phương trình vi phân: y'+6y = u(t-5)$e^{2(t-5)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 14.

Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1 ) ta được: $pY+6Y=\dfrac{e^{-5p}}{p-2}+14$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : $Y=\dfrac{e^{-5p}}{(p-2)(p+6)}+\dfrac{14}{p+6}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: $Y=\dfrac{1}{8}e^{-5p}\left(\dfrac{1}{p-2}-\dfrac{1}{p+6}\right)+\dfrac{14}{p+6}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: $y=\dfrac{1}{8}\left(e^{2(t-5)}-e^{-6(t-5)}\right)u(t-5)+14e^{-6t}$

**A)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**B)** Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

**Câu 5** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]=\dfrac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u}ch6u\,du\right]=\dfrac{p-5}{p\left((p-5)^2-36\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

D) Nếu $f(t)=\begin{cases}0 & khi \quad 0<t<\pi \\ \sin 9t & khi \quad \pi<t<2\pi\end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-\pi p}}\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-pt}\sin 9t dt$

**Câu 6** Khẳng định nào sau đây **sai**?

A) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$, $\forall n\in Z$.

B) Phương trình $e^Z = 2016.e^{-3\pi i}$ vô nghiệm.

C) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \pm 2k\pi\end{cases}$

D) $[r(\cos\varphi \mp i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi \mp i\sin n\varphi)$, $\forall n\in Z$.

**Câu 7** Phần thực và phần ảo của hàm phức $f(z)=u(x,y)+iv(x,y) = \dfrac{1+3i}{1-2i} - i^5 + e^{3z}$ là:

A) $u(x,y) = -1+e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$

B) $u(x,y) = 1+e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$

C) $u(x,y) = e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$

D) $u(x,y) = -1+e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = -e^{3x}\sin 3y$

**Câu 8** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu khai triển Laurent hàm f(z) quanh điểm bất thường cô lập a có dạng

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n \text{ thì } \operatorname{Res}[f(z),a] = a_{-1}$$

B) $f(z) = z^3 e^{\frac{2}{z}} = z^3 + 2z^2 + 2z + \dfrac{2^3}{3!} + \dfrac{2^4}{z\ .4!} + \ldots$ và z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

C) $\oint\limits_{|z-2i|=5} z^3 e^{\frac{2}{z}} dz = = 2\pi i \operatorname{Res}\left[z^3 e^{\frac{2}{z}}, 0\right] = \dfrac{4\pi}{3}$

D) Hàm f(z)=(z+i) $\cos\dfrac{1}{z+i} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{(2n)!}\dfrac{1}{(z+i)^{2n-1}}$ nên thặng dư $\operatorname{Res}\left[(z+i)\cos\dfrac{1}{z+i}, -i\right] = -\dfrac{1}{2}$.

**Câu 9** Khẳng định nào sau đây **sai?**

**A)** Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Riemann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.

**B)** Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

**C)** Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không khả vi trên miền D.

**D)** Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm $z = x_o+iy_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Riemann tại $(x_o,y_o)$.

**Câu 10** Để giải phương trình tích phân: y(t)= $2e^{-7t} + 10\int\limits_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = $2e^{-7t}$+10y(t)*cos3t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[2e^{-7t}] + 10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$

- Áp dụng công thức Borel ta được

$$Y = \frac{2}{p+7} + 10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y = \frac{2}{p+7} + 10Y\frac{p}{p^2+9}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: $Y = \dfrac{2(p^2+9)}{(p-1)(p-9)(p+7)}$

- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-9}+\frac{C}{p+7}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)

- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{t}+Be^{9t}+Ce^{-7t}$

**A)** Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
**B)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

## PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** (1,5 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z)=(z-i)^2\sin\frac{1}{z-i}$ quanh điểm bất thường cô lập $z=i$. Tính tích phân $I=\oint_{|z-3i|=6}\left((z+i)^2\sin\frac{1}{z-i}+e^{5z}\right)dz$.

***Câu 12*** (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

y’’ + 6y’ +20 y = 50 + $e^{-6t}$ với điều kiện y(0) = 0 và y’(0) = 0

Tính $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

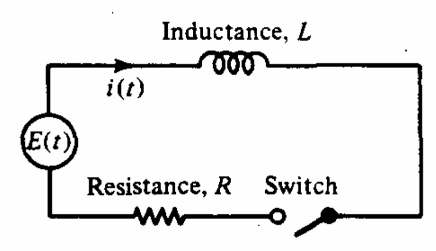
***Câu 13*** (1,5 *điểm*)

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$$L\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t)=E_o\ ,\ i(0)=0$$

với $E_o, R, L$ là các hằng số dương.

Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$. Tính $\lim_{t\to+\infty} i(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $i(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.




---

*** Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| **Nội dung kiểm tra** | **Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)** |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân.<br>Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống. | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |

Ngày 13 tháng 1 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2015-2016<br>MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE<br>Mã đề: 0100-0014-0001-2016-314116-0100</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: .....................................<br>Mã số sinh viên:................................<br>Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ...........<br>Thời gian : 90 phút (14/1/2016)<br>Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

*ĐÁP ÁN MÔN*

**HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**

(Ngày thi**:** 14/1/2016)

## PHẦN TRẮC NGHIỆM

Mã đề: 0001-0014-0001-2016-314116-0001

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | **B** | **A** | **C** | **A** | **C** | **C** | **C** | **A** | **D** | **B** |

Mã đề: 0010-0014-0001-2016-314116-0010

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | **A** | **D** | **B** | **A** | **C** | **A** | **C** | **C** | **C** | **B** |

Mã đề: 0011-0014-0001-2016-314116-0011

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | **C** | **C** | **A** | **D** | **B** | **A** | **C** | **A** | **C** | **B** |

Mã đề: 0100-0014-0001-2016-314116-0100

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | **A** | **C** | **C** | **A** | **D** | **B** | **A** | **C** | **C** | **B** |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

| *Câu hỏi* | **Nội dung** | ***Điểm*** |
|---|---|---|
| **Câu 11** | | **1 điểm** |
| | $\sin\frac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{1}{z-i})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n+1}}$ <br> $f(z)=(z-i)^2\sin\frac{1}{z-i} = (z-i)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n-1}}$ <br> $I = \oint\limits_{\lvert z-3i\rvert=6}\left((z+i)^2\sin\frac{1}{z-i}+e^{5z}\right)dz = \oint\limits_{\lvert z-3i\rvert=6}\left((z+i)^2\sin\frac{1}{z-i}\right)dz + \oint\limits_{\lvert z-3i\rvert=6}e^{5z}dz$ | 0,75đ |

$$\oint\limits_{|z-3i|=6} e^{5z}dz = 0$$ ( vì hàm $e^{5z}$ có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên ***giải tích*** trên toàn mặt phẳng phức) — 0,25đ

$$\oint\limits_{|z-3i|=6}\left((z+i)^2\sin\frac{1}{z-i}\right)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}[(z+i)^2\sin\frac{1}{z-i},i]$$

$$(z+i)^2 = (z-i+2i)^2 = (z-i)^2 + 4i(z-i) - 4$$

Suy ra — 0,25đ

$$(z+i)^2\sin\frac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4i(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n+1}}$$

Nên $\mathrm{Res}[(z+i)^2\sin\frac{1}{z-i},i] = \frac{-1}{3!} - 4 = -\frac{25}{6}$ — 0,25đ

$$\oint\limits_{|z-3i|=6}\left((z+i)^2\sin\frac{1}{z-i}\right)dz = 2\pi i\,(-\frac{25}{6}) + 0 = -\frac{25\pi i}{3}$$ — 0,25đ

## Câu12 — 1,5đ

Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được:

0,5đ

$$p^2Y - py(0) - y'(0) + 6(pY - y(0)) + 20Y = \mathscr{L}[50 + e^{-6t}]$$

$$\Leftrightarrow Y(p^2 + 6p + 20) = \frac{50}{p} + \frac{1}{p+6}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{51p + 300}{p(p+6)[(p+3)^2 + 11]} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+6} + \frac{C(p+3) + D\sqrt{11}}{(p+3)^2 + 11}$$ — 0,5đ

Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p} + B\frac{1}{p+6} + C\frac{p+3}{(p+3)^2+11} + D\frac{\sqrt{11}}{(p+3)^2+11}]$$

$$\Leftrightarrow y(t) = A + Be^{-6t} + Ce^{-3t}\cos\sqrt{11}t + De^{-3t}\sin\sqrt{11}t$$ — 0,5đ

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} A + B\lim_{t\to+\infty} e^{-6t} + \lim_{t\to+\infty}[e^{-3t}(C\cos\sqrt{11}t + D\sin\sqrt{11}t)] = A$$

Sau khoảng thời gian t đủ lớn thì $y(t) \approx A = \frac{5}{2}$ (tính $A$ bên dưới) — 0,5đ

Tìm $A, B, C, D$ dựa vào đẳng thức:

$$\frac{51p + 300}{p(p+6)[(p+3)^2 + 11]} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+6} + \frac{C(p+3) + D\sqrt{11}}{(p+3)^2 + 11}$$

$$A = \frac{51\times 0 + 300}{(0+6)[(0+3)^2 + 11]} = \frac{5}{2},\quad B = \frac{51\times(-6) + 300}{-6[(-6+3)^2 + 11]} = \frac{1}{20}$$

Cho $p=-3$: $-\dfrac{147}{99}=\dfrac{A}{-3}+\dfrac{B}{3}+\dfrac{D}{\sqrt{11}}$

Cho $p=-2$: $-\dfrac{99}{48}=\dfrac{A}{-2}+\dfrac{B}{4}+\dfrac{C+D\sqrt{11}}{12}$

Suy ra $C=-\dfrac{51}{20}$ , $D=-\dfrac{147}{220}\sqrt{11}$

| **Câu 13** | **1,5đ** |
|---|---|

$$L\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t)=E_o\ ,\ i(0)=0$$

với $E_o, R, L$ là các hằng số dương.

Đặt $\mathbf{I}=\mathbf{I}(p)=\mathscr{L}[i(t)] \Rightarrow \mathscr{L}\left[\dfrac{di}{dt}\right]=\mathscr{L}[i'(t)]=p\mathbf{I}-i(0)=p\mathbf{I}$

$L.i'(t)+Ri=E_0$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$L\mathbf{I}p+R\mathbf{I}=\frac{E_o}{p} \Leftrightarrow \mathbf{I}\,(Lp+R)=\frac{E_o}{p}$$

**0.5đ**

$$\Leftrightarrow \mathbf{I}=\frac{E_o}{p(Lp+R)} \Leftrightarrow \mathbf{I}=\frac{E_o}{R}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right)$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được : $i(t)=\mathscr{L}^{-1}[\,I\,]=\dfrac{E_o}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

**0.5đ**

$$\lim_{t\to+\infty} i(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{E_o}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=\frac{E_o}{R}$$

Sau khoảng thời gian t đủ lớn $i(t)\approx\dfrac{E_o}{R}$

**0.5đ**

*** HẾT***